FRANCESCO BICCARI

25/03/2013 IV H

COMPITO DI MATEMATICA (B)

• ESERCIZIO 1

$$y = a \sin(3x) + b\cos(3x)$$

IMPONGO IL PASSAGGIO PER $A\left(\frac{\pi}{6}; 2\right)$: $\begin{cases} 2 = a\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + b\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ 0 = a\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) + b\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) \end{cases}$

" " " $B\left(\frac{4\pi}{9}; 0\right)$:

$$\begin{cases} 2 = a + \cancel{0} \\ 0 = a\left(\cancel{-}\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\right) + b\left(\cancel{-}\frac{1}{\cancel{2}}\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 2 \\ b = -\sqrt{3}a = -2\sqrt{3} \end{cases} \qquad \boxed{\begin{matrix} a = 2 \\ b = -2\sqrt{3} \end{matrix}}$$

QUINDI $$y = 2\sin(3x) - 2\sqrt{3}\cos(3x)$$

USANDO IL METODO DELL'ANGOLO AGGIUNTO

$$y = A\sin(3x + \varphi)$$

DOVE $A = \sqrt{4+12} = 4$

$$\begin{matrix} \cos\varphi = \frac{1}{2} \\ \operatorname{sen}\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{matrix} \Rightarrow \varphi = \frac{5}{3}\pi$$

$$\boxed{y = 4\sin\left(3x + \frac{5}{3}\pi\right)}$$

• ESERCIZIO 2

PER TRASFORMARE $y = \sin(x)$ IN $y = \frac{1}{2}\sin\left(3x + \frac{\pi}{8}\right) - 1 = \frac{1}{2}\sin\left[3\left(x + \frac{\pi}{24}\right)\right] - 1$

DEVO APPLICARE PRIMA UNA DILATAZIONE DI COEFF. $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$

E POI UNA TRASLAZIONE CON VETTORE DI TRASL. $\vec{v} = \left(-\frac{\pi}{24}; -1\right)$

• ESERCIZIO 3

GRAFICO DI $y = 4\sin\left(-3x + \frac{\pi}{2}\right) + 1 =$ USANDO $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$

$= -4\sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$

$= -4\sin\left[3\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right] + 1$

① DOMINIO $\equiv \mathbb{R}$

② CODOMINIO $[-4+1; 4+1] = [-3; 5]$

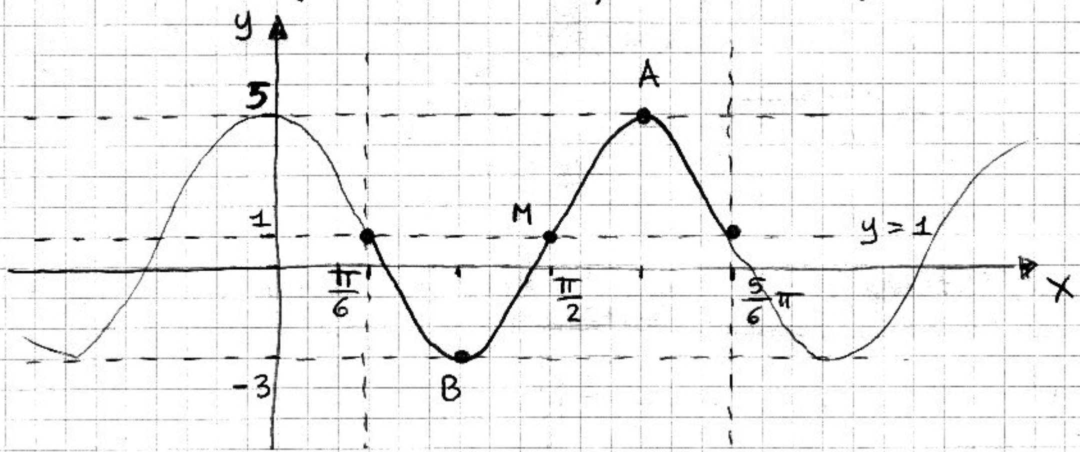
③ PERIODO $T = \frac{2\pi}{3}$

④ $D = \left(\frac{1}{3}; -4\right)$ DILATAZIONE $\quad \vec{v} = \left(\frac{\pi}{6}; +1\right)$ VETT. TRASL.

⑤ INTERVALLO DI RAPPRESENTAZIONE ($[0; 2\pi]$ TRASFORMATO)

$\left[0 + \frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right] = \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5}{6}\pi\right]$

PUNTO MEDIO $M = \left(\left(\frac{\pi}{6} + \frac{5}{6}\pi\right)\frac{1}{2}; 1\right) = \left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$



MASSIMO A IN $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{5}{6}\pi\right]$: $x_A = \left(\frac{5}{6}\pi + \frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{2} = \frac{2}{3}\pi$

MINIMO B IN $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{5}{6}\pi\right]$: $x_B = \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$

ALL'INTERNO DELL'INTERVALLO SCELTO ABBIAMO PRIMA UN MINIMO E POI UN MASSIMO A CAUSA DEL SEGNO MENO DAVANTI AL SENO.

I MASSIMI VENGONO ASSUNTI IN $x_{MAX} = \frac{2}{3}\pi + k\frac{2\pi}{3} \quad k \in \mathbb{Z}$

I MINIMI VENGONO ASSUNTI IN $x_{MIN} = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} \quad k \in \mathbb{Z}$

- ESERCIZIO 4

$$y = 2\sin(2x) + \sin^2(x) + \sqrt{3}$$

QUESTA È UNA SINUSOIDE CHE VA RIPORTATA IN FORMA NORMALE PER CONOSCERE LE QUANTITÀ RICHIESTE. USANDO LE FORMULE DI BISEZIONE

$$y = 2\sin(2x) + \frac{1-\cos(2x)}{2} + \sqrt{3}$$

$$= 2\sin(2x) - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2} + \sqrt{3}$$

USANDO IL METODO DELL'ANGOLO AGGIUNTO

$$= A\sin(2x + \varphi) + \frac{1}{2} + \sqrt{3}$$

DOVE

$$A = \sqrt{4 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{4}{\sqrt{17}} \\ \sin\varphi &= -\frac{1}{\sqrt{17}} \end{aligned}\right\}$$ PER LE RICHIESTE DEL PROBLEMA NON CI SERVE DI TROVARE φ

DOMINIO $\equiv \mathbb{R}$

CODOMINIO $\left[-\frac{\sqrt{17}}{2} + \frac{1}{2} + \sqrt{3} \,;\, \frac{\sqrt{17}}{2} + \frac{1}{2} + \sqrt{3}\right]$

PERIODO $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$

AMPIEZZA $A = \frac{\sqrt{17}}{2}$

- ESERCIZIO 5

DAL GRAFICO SI VEDE CHIARAMENTE CHE IL CODOMINIO È $[-4; 6]$

PERTANTO L'AMPIEZZA È

$$A = \frac{6-(-4)}{2} = 5$$

E IL TERMINE NOTO È $C = \frac{6-4}{2} = 1$.

LA DISTANZA FRA DUE MASSIMI CONSECUTIVI PUÒ ESSERE INVECE USATA PER CALCOLARE FACILMENTE IL PERIODO $T = \frac{5\pi}{2} - \left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 4\pi$

- ESERCIZIO 6

$$y = \frac{1}{3}\sin\left(3x - \frac{7\pi}{8}\right) + 1 \qquad y = \frac{1}{3}\cos\left(3x + \frac{5\pi}{8}\right) + 1$$

HANNO LO STESSO GRAFICO?

TRASFORMIAMO LA SECONDA FUNZIONE IN SENO USANDO IL FATTO CHE $\cos(\alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

$$y = \frac{1}{3}\cos\left(3x + \frac{5\pi}{8}\right) + 1 = \frac{1}{3}\sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x - \frac{5\pi}{8}\right) + 1 =$$

$$= \frac{1}{3}\sin\left(-3x - \frac{\pi}{8}\right) + 1 =$$ USANDO $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$

$$= -\frac{1}{3}\sin\left(3x + \frac{\pi}{8}\right) + 1$$

LE DUE FUNZIONI SEMBRANO DIVERSE MA GUARDANDO LE FASI CI SI ACCORGE CHE DIFFERISCONO DI π. $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{8} - \left(-\frac{7\pi}{8}\right) = \pi$

RICORDANDO CHE $\sin(\alpha - \pi) = -\sin(\alpha)$

POSSO RISCRIVERE LA FUNZIONE IN QUESTO MODO:

$$y = -\frac{1}{3}\sin\left(3x + \frac{\pi}{8}\right) + 1 = \frac{1}{3}\sin\left(3x + \frac{\pi}{8} - \pi\right) + 1$$

$$= \frac{1}{3}\sin\left(3x - \frac{7\pi}{8}\right) + 1$$

QUINDI ORA È CHIARO CHE LE DUE FUNZIONI SONO IN REALTÀ UGUALI E HANNO LO STESSO GRAFICO!

<u>NOTA</u>: UN ALTRO MODO DI DIMOSTRARE CHE LE DUE FUNZIONI HANNO LO STESSO GRAFICO È DI GUARDARE TUTTE LE CARATTERISTICHE DELLE DUE SINUSOIDI:

1) AMPIEZZA UGUALE
2) PERIODO UGUALE
3) TERMINE NOTO UGUALE
4) MASSIMI E MINIMI NELLE STESSE POSIZIONI