

La quantizzazione del campo elettromagnetico

Francesco Biccari*

Roma, 2 aprile 2017

Sommario

Questi appunti sono stati scritti nei mesi di ottobre e novembre 2003 e corrispondono alla primissima parte del corso di Fisica Teorica III tenuto dal prof. [Nicola Cabibbo](#) alla Sapienza – Università di Roma. Sono stati leggermente riveduti e corretti nel 2007, nel 2011 e nel 2017. L'ultima versione di questi appunti è disponibile alla pagina <http://biccari.altervista.org/c/fisica/appunti/> dove è possibile trovare anche gli appunti dell'argomento successivo del corso, l'interazione radiazione–materia.

1 Introduzione

Questi brevi appunti corrispondono al paragrafo 1.2 del libro *Quantum Field Theory* di F. Mandl e G. Shaw. Si mostra un semplice approccio non-covariante per quantizzare il campo elettromagnetico. Rispetto al Mandl e Shaw i calcoli sono stati esplicitati. Tale approccio serve solo per introdurre in maniera semplice alcuni concetti della quantizzazione dei campi che hanno una teoria classica completa. Un approccio migliore, perché covariante a vista, verrà sviluppato più avanti, sia nel corso che nel libro di Mandl e Shaw.

2 Le equazioni di Maxwell

L'elettromagnetismo classico è descritto dalle equazioni di Maxwell e dalla forza di Lorentz. Le equazioni di Maxwell, usando il sistema internazionale di unità di misura (SI), sono:¹

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4)$$

*Per contattarmi: biccari@gmail.com

¹Nella fisica delle particelle si tende a usare un altro sistema di unità: $\epsilon_0 = \mu_0 = c = 1$ razionalizzato. Le unità per le varie grandezze, scegliendo come unità di base il grammo g e il secondo s diventano: per \vec{E} e \vec{B} $g^{\frac{1}{2}} s^{-\frac{3}{2}}$, per ρ e \vec{j} $g^{\frac{1}{2}} s^{-\frac{5}{2}}$. Se si pone anche $\hbar = 1$ si ha: per \vec{E} e \vec{B} s^{-2} e per ρ e \vec{j} s^{-3} .

dove $\vec{E}(\vec{x}, t)$ è il vettore campo elettrico, $\vec{B}(\vec{x}, t)$ è il vettore induzione magnetica, $\rho(\vec{x}, t)$ è la densità di carica elettrica e $\vec{j}(\vec{x}, t)$ è la densità di corrente elettrica. ε_0 e μ_0 sono rispettivamente la *costante elettrica* e la *costante magnetica*.

3 I potenziali vettore e scalare

Ora riscriviamo le suddette equazioni in termini di due potenziali. Condizione sufficiente (ma non necessaria) affinché un campo ammetta un potenziale vettore è che abbia divergenza nulla; questo è il caso del campo induzione magnetica \vec{B} . Definiamo pertanto:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad (5)$$

ove \vec{A} è il potenziale vettore. Sostituendo questa espressione di \vec{B} nell'eq. (3) si ha:

$$\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (6)$$

Sappiamo inoltre che ogni gradiente di un campo scalare è irrotazionale, pertanto, introducendo il potenziale scalare φ , possiamo scrivere

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \varphi. \quad (7)$$

(il segno meno è una convenzione). Esplicitando il campo elettrico:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (8)$$

Finora abbiamo usato le equazioni (2) e (3) che ci sono servite per introdurre \vec{A} e φ . Usando la (1) e la (4) ora esprimeremo la dinamica di \vec{A} e φ . Sostituendo la (5) e la (8) nella (1) e nella (4) si ricava, dalla (1):

$$-\nabla^2 \varphi - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (9)$$

e dalla (4), ricordando che $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - \nabla^2 \vec{v}$:

$$-\nabla^2 \vec{A} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial(\vec{\nabla} \varphi)}{\partial t} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \mu_0 \vec{j}. \quad (10)$$

4 Le trasformazioni di gauge

Come è noto, \vec{A} non è univocamente determinato dato che è definito a meno di un gradiente di un campo scalare. La fisica, e in particolare il campo induzione magnetica, ovviamente non cambiano per l'aggiunta di questo termine!

Cambiare un certo \vec{A} con un \vec{A}' , aggiungendo al primo un gradiente di un campo scalare, significa effettuare una *trasformazione di gauge*:

$$\vec{A} \longrightarrow \vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla} f \quad (11)$$

da cui, imponendo che anche il campo elettrico rimanga immutato, si ottiene:²

$$\varphi \longrightarrow \varphi' = \varphi + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (12)$$

Ricordiamo che una tale trasformazione lascia intatta la fisica, o come si dice, *le equazioni di Maxwell sono invarianti per una trasformazione di gauge*.

Questo grado di libertà ci permette di imporre una condizione su \vec{A} a nostro piacimento, o come si dice, dobbiamo fare una *scelta di gauge*. Scelto un \vec{A} e un φ si cerca una f che imponga su \vec{A}' e φ' la nostra *scelta di gauge*. Noi useremo in questo, e nel resto del corso, la *gauge di Coulomb*:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (13)$$

Siamo inoltre confortati dalla matematica che ci dice che una scelta del genere ammette sempre soluzione.³ Si chiama **gauge di Coulomb** perché questa scelta fa in modo che φ sia dato, come vedremo nel prossimo paragrafo, dalla stessa espressione valida per il campo elettrostatico, cioè dove compaiono solo i valori istantanei della densità di carica e non quelli ritardati. La gauge di Coulomb si dice inoltre *completa* perché imporre $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ fissa ogni ulteriore arbitrarietà. L'eq. (11) sarebbe infatti ancora indeterminata a meno di un termine tale che $\nabla^2 f = 0$. Se però si impone, come è naturale fisicamente, che questa f vada a zero all'infinito, la matematica ci dice che f non può che essere identicamente nulla ovunque: $f \equiv 0$.

5 Le equazioni di Maxwell in termini di \vec{A} e φ

Introducendo l'operatore *d'Alambertiano* ("quadrato")

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \quad (14)$$

e considerando che abbiamo scelto la gauge di Coulomb, partendo dalla (9) e dalla (10) con semplici passaggi si ha:

$$-\nabla^2 \varphi = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (15)$$

$$\square \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial(\vec{\nabla} \varphi)}{\partial t} = \mu_0 \vec{j} \quad (16)$$

cioè le equazioni di Maxwell in termini di \vec{A} e φ , dove $c^{-2} = \mu_0 \varepsilon_0$. Ricordiamo inoltre che per tornare alle quantità fisiche valgono le equazioni

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad (17)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (18)$$

²A rigore si avrebbe $\varphi \longrightarrow \varphi' = \varphi + \frac{\partial f}{\partial t} + k(t)$ ove $k(t)$ è una generica funzione del tempo, che però può essere reinglobata nella definizione di f . In questo modo: $f' = f + K(t)$ ove $K(t)$ è una generica primitiva di $k(t)$. Da cui $\varphi' = \varphi + \frac{\partial f'}{\partial t}$ e $\vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla} f'$, perché $\vec{\nabla} f = \vec{\nabla} f'$. Richiamando f' con f si ha il risultato voluto.

³Si ha una equazione su f pari a $\nabla^2 f = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ che ammette sempre soluzione. Sia chiaro che la f nella maggior parte dei casi non va ricavata! Trovare l'equazione a cui obbedisce serve solamente a capire se questa f esista o meno.

6 Le equazioni di Maxwell in assenza di cariche e correnti

In assenza di cariche e correnti, cioè:

$$\begin{aligned}\rho &= 0 \\ \vec{j} &= \vec{0}\end{aligned}\tag{19}$$

le equazioni di Maxwell si riducono a:

$$\nabla^2\varphi = 0\tag{20}$$

$$\square\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial(\vec{\nabla}\varphi)}{\partial t} = \vec{0}.\tag{21}$$

Imponendo per ragioni fisiche che φ si annulli all'infinito, l'eq. (20), essendo una equazione di Laplace, ha come soluzione

$$\varphi \equiv 0.\tag{22}$$

Sostituendo la precedente nella (21), si ha che le componenti di \vec{A} soddisfano l'equazione delle onde

$$\square\vec{A} = \vec{0}.\tag{23}$$

Pertanto ora ci appresteremo a trovare la soluzione più generale dell'equazione (23), tenendo presente che abbiamo scelto la gauge di Coulomb.

$$\begin{cases} \square\vec{A} = \vec{0} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \end{cases}\tag{24}$$

Praticamente troveremo la descrizione del campo elettromagnetico nel vuoto assoluto, anche detto *campo classico di radiazione*.

7 Soluzione delle equazioni di Maxwell in assenza di cariche e correnti

Una soluzione particolare dell'eq. (23) è data da un'onda piana generica⁴

$$\vec{A}_{\vec{k}} = d\vec{u}_{\vec{k}}(\vec{x}, t) = \frac{d}{\sqrt{V}} \vec{\varepsilon}_{\vec{k}} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega_{\vec{k}}t)},\tag{25}$$

in cui deve valere $|\omega| = c|\vec{k}|$; per questo abbiamo indicato ω con il pedice \vec{k} .⁵ La costante d ha le dimensione di $\vec{A}\sqrt{V}$ ($\text{N A}^{-1} \text{m}^{3/2}$). $\vec{\varepsilon}_{\vec{k}}$ è un versore (quindi di modulo pari a 1) adimensionale e in generale complesso.⁶ Le $\vec{u}_{\vec{k}}$ formano una base completa e rispettano la condizione di normalizzazione:

$$\iiint_V |\vec{u}(\vec{x}, t)|^2 d^3x = 1\tag{26}$$

⁴Un altro modo di procedere è quello di sviluppare \vec{A} in serie di Fourier e, sostituendolo nell'eq. (23), ricavare la dipendenza temporale dei coefficienti dell'espansione.

⁵I valori negativi di ω rappresentano *onde regressive* cioè onde che vanno nel verso contrario rispetto al verso del vettore d'onda \vec{k} .

⁶Anche se il pedice è lo stesso per ω e per $\vec{\varepsilon}$, il primo dipende solo dal suo modulo mentre il secondo solo dalla sua direzione e dal suo verso.

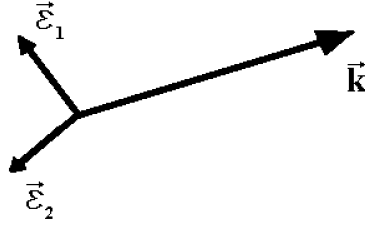


Figura 1: il vettore d'onda \vec{k} che descrive la propagazione dell'onda e i due versori $\vec{\varepsilon}_1$ e $\vec{\varepsilon}_2$ che descrivono l'oscillazione del campo \vec{A} sono, per la gauge di Coulomb, ortogonali e formano quindi una terna ortogonale.

Per risolvere la (23) senza troppe difficoltà matematiche, limitiamoci a considerare la soluzione in un volume cubico di lato L e volume V con condizioni periodiche al contorno, cosicché avremo un numero infinito di gradi di libertà, ma numerabile! Potremo quindi esprimere la nostra soluzione come una serie di Fourier e non come una trasformata di Fourier. Imponiamo quindi le condizioni periodiche al contorno:

$$\vec{A}_{\vec{k}}(x + mL, y, z, t) = \vec{A}_{\vec{k}}(x, y + mL, z, t) = \vec{A}_{\vec{k}}(x, y, z + mL, t) = \vec{A}_{\vec{k}}(x, y, z, t) \quad (27)$$

con $m \in \mathbb{Z}$. Questo ci porta ad avere valori discreti di \vec{k} :

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{L}(n_x, n_y, n_z) \quad (28)$$

con $(n_x, n_y, n_z) \in \mathbb{Z}^3$.

Adesso invece concentriamoci sulla gauge di Coulomb, dalla quale deve risultare $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{\vec{k}}(\vec{x}, t) = 0$. Con semplici passaggi arriviamo a:

$$\vec{k} \cdot \vec{\varepsilon}_{\vec{k}} = 0. \quad (29)$$

Questo significa che \vec{A} è sempre contenuto nel piano perpendicolare a \vec{k} cioè alla direzione di propagazione; per questo motivo si dice che \vec{A} è un campo *trasversale*. Questa condizione ci permette di definire due nuovi versori di polarizzazione *reali*, $\vec{\varepsilon}_{\vec{k},1}$ e $\vec{\varepsilon}_{\vec{k},2}$ ortogonali tra loro e contenuti nel piano perpendicolare a \vec{k} . Quindi possiamo dire che ogni \vec{u} è esprimibile come combinazione lineare, con coefficienti in generale complessi, di due funzioni (onde piane polarizzate linearmente) date da:

$$\vec{u}_{\vec{k},r}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \vec{\varepsilon}_{\vec{k},r} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega_{\vec{k}} t)} \quad r = 1, 2. \quad (30)$$

Si noti che $\vec{\varepsilon}_{\vec{k},1}$, $\vec{\varepsilon}_{\vec{k},2}$ e $\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$, per ogni \vec{k} , formano una terna ortonormale (vedi Fig. 1):

$$\begin{cases} \vec{\varepsilon}_{\vec{k},r} \cdot \vec{\varepsilon}_{\vec{k},r'} = \delta_{rr'} \\ \vec{\varepsilon}_{\vec{k},r} \cdot \vec{k} = 0 \end{cases} \quad (31)$$

Fisicamente si capisce che ci sono due sole polarizzazioni lineari possibili (lungo $\vec{\varepsilon}_{\vec{k},1}$ e $\vec{\varepsilon}_{\vec{k},2}$) che devono essere sempre ortogonali alla direzione di propagazione dell'onda definita dal vettore d'onda \vec{k} . Si ricordi che le polarizzazioni, per esempio

circolari, hanno $\vec{\varepsilon}_{\vec{k}}$ complesso ma esprimibile come combinazione lineare a coefficienti complessi di due $\vec{u}_{\vec{k},r}$ e quindi di $\vec{\varepsilon}_{\vec{k},1}$ e $\vec{\varepsilon}_{\vec{k},2}$, che, lo ricordiamo, sono *reali*.

La soluzione generale che cerchiamo sarà data, essendo l'equazione omogenea, dalla più generica combinazione lineare delle $\vec{u}_{\vec{k},r}$:

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{k},r} c'_{\vec{k},r} \vec{u}_{\vec{k},r}(\vec{x}, t).$$

Dobbiamo però imporre che \vec{A} sia reale! Quindi:

$$\vec{A} = \vec{A}^*$$

Sommandoli:

$$\vec{A} + \vec{A}^* = 2\vec{A} = \sum_{\vec{k},r} [c'_{\vec{k},r} \vec{u}_{\vec{k},r}(\vec{x}, t) + c'^*_{\vec{k},r} \vec{u}_{\vec{k},r}^*(\vec{x}, t)],$$

il 2 si può inglobare nelle costanti che ora chiameremo c anziché c' e pertanto alla fine abbiamo

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{k},r} [c_{\vec{k},r} \vec{u}_{\vec{k},r}(\vec{x}, t) + c^*_{\vec{k},r} \vec{u}_{\vec{k},r}^*(\vec{x}, t)]. \quad (32)$$

Per finire, se definiamo

$$c_{\vec{k},r}(t) = c_{\vec{k},r} e^{-i\omega_{\vec{k}} t}$$

e

$$\vec{u}_{\vec{k},r}(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \vec{\varepsilon}_{\vec{k},r} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}$$

possiamo scrivere:

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{k},r} [c_{\vec{k},r}(t) \vec{u}_{\vec{k},r}(\vec{x}) + c^*_{\vec{k},r}(t) \vec{u}_{\vec{k},r}^*(\vec{x})]. \quad (33)$$

Infine, siccome si vede facilmente che

$$\iiint_V \vec{u}_{\vec{k},r}^*(\vec{x}) \cdot \vec{u}_{\vec{k}',r'}(\vec{x}) d^3x = \delta_{rr'} \delta_{\vec{k}\vec{k}'}$$

allora possiamo pensare alla (33) come a uno sviluppo in serie di Fourier della funzione \vec{A} nello spazio delle $\vec{u}_{\vec{k},r}(\vec{x})$.

8 Energia del campo classico di radiazione

L'energia del campo elettromagnetico contenuta nel volume V è data da

$$H = \frac{1}{2} \iiint_V (\mu_0^{-1} |\vec{B}|^2 + \varepsilon_0 |\vec{E}|^2) d^3x \quad (34)$$

Sostituendo \vec{B} ed \vec{E} in funzione di \vec{A} all'interno di questa equazione e risolvendo si ha

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2} \iiint_V \left(\mu_0^{-1} |\vec{\nabla} \wedge \vec{A}|^2 + \varepsilon_0 \left| \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right|^2 \right) = \\
&= \frac{1}{2} \iiint_V \left\{ \mu_0^{-1} \left| \vec{\nabla} \wedge \left[\sum_{\vec{k},r} \left[c_{\vec{k},r}(t) \vec{u}_{\vec{k},r}(\vec{x}) + c_{\vec{k},r}^*(t) \vec{u}_{\vec{k},r}^*(\vec{x}) \right] \right] \right|^2 + \right. \\
&\quad \left. + \varepsilon_0 \left| \frac{\partial}{\partial t} \left[\sum_{\vec{k},r} \left[c_{\vec{k},r}(t) \vec{u}_{\vec{k},r}(\vec{x}) + c_{\vec{k},r}^*(t) \vec{u}_{\vec{k},r}^*(\vec{x}) \right] \right] \right|^2 \right\} d^3x = \\
&= \frac{1}{2\mu_0} \iiint_V \underbrace{\left\{ \left| \left[\sum_{\vec{k},r} \left[c_{\vec{k},r}(t) (\vec{\nabla} \wedge \vec{u}_{\vec{k},r}(\vec{x})) + c_{\vec{k},r}^*(t) (\vec{\nabla} \wedge \vec{u}_{\vec{k},r}^*(\vec{x})) \right] \right] \right|^2 \right\}}_{H_B} d^3x + \\
&\quad + \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_V \underbrace{\left\{ \left| \left[\sum_{\vec{k},r} \left[\left(\frac{\partial c_{\vec{k},r}(t)}{\partial t} \right) \vec{u}_{\vec{k},r}(\vec{x}) + \left(\frac{\partial c_{\vec{k},r}^*(t)}{\partial t} \right) \vec{u}_{\vec{k},r}^*(\vec{x}) \right] \right|^2 \right\}}_{H_E} d^3x
\end{aligned}$$

Calcoliamo il primo termine:

$$\begin{aligned}
H_B &= \frac{1}{2\mu_0} \sum_{\vec{k},r,\vec{k}',r'} \iiint_V \left\{ \left[c_{\vec{k},r}(t) (\vec{\nabla} \wedge \vec{u}_{\vec{k},r}(\vec{x})) + c_{\vec{k},r}^*(t) (\vec{\nabla} \wedge \vec{u}_{\vec{k},r}^*(\vec{x})) \right] \cdot \right. \\
&\quad \left. \cdot \left[c_{\vec{k}',r'}^*(t) (\vec{\nabla} \wedge \vec{u}_{\vec{k}',r'}(\vec{x}))^* + c_{\vec{k}',r'}(t) (\vec{\nabla} \wedge \vec{u}_{\vec{k}',r'}^*(\vec{x}))^* \right] \right\} d^3x = \\
&= \frac{1}{2\mu_0} \sum_{\vec{k},r,\vec{k}',r'} \left\{ c_{\vec{k},r}(t) c_{\vec{k}',r'}^*(t) \iiint_V \left[(\vec{\nabla} \wedge \vec{u}_{\vec{k},r}(\vec{x})) \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{u}_{\vec{k}',r'}^*(\vec{x})) \right] d^3x + \right. \\
&\quad + c_{\vec{k},r}(t) c_{\vec{k}',r'}(t) \iiint_V \left[(\vec{\nabla} \wedge \vec{u}_{\vec{k},r}(\vec{x})) \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{u}_{\vec{k}',r'}(\vec{x})) \right] d^3x + \\
&\quad + c_{\vec{k},r}^*(t) c_{\vec{k}',r'}^*(t) \iiint_V \left[(\vec{\nabla} \wedge \vec{u}_{\vec{k},r}^*(\vec{x})) \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{u}_{\vec{k}',r'}^*(\vec{x})) \right] d^3x + \\
&\quad \left. + c_{\vec{k},r}^*(t) c_{\vec{k}',r'}(t) \iiint_V \left[(\vec{\nabla} \wedge \vec{u}_{\vec{k},r}^*(\vec{x})) \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{u}_{\vec{k}',r'}(\vec{x})) \right] d^3x \right\}
\end{aligned}$$

Ora facendo semplici conti si vede che:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \wedge \vec{u}_{\vec{k},r}(\vec{x}) &= \frac{1}{\sqrt{V}} i (\vec{k} \wedge \vec{\varepsilon}_{\vec{k},r}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \\
\vec{\nabla} \wedge \vec{u}_{\vec{k},r}^*(\vec{x}) &= -\frac{1}{\sqrt{V}} i (\vec{k} \wedge \vec{\varepsilon}_{\vec{k},r}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}}
\end{aligned}$$

Sostituendo si ha:

$$\begin{aligned}
H_B = & \frac{1}{2\mu_0} \sum_{\vec{k}, r, \vec{k}', r'} \\
& \left\{ c_{\vec{k}, r}(t) c_{\vec{k}', r'}^*(t) (\vec{k} \wedge \vec{\varepsilon}_{\vec{k}, r}) \cdot (\vec{k}' \wedge \vec{\varepsilon}_{\vec{k}', r'}) \frac{1}{V} \iiint_V e^{i(+\vec{k}-\vec{k}') \cdot \vec{x}} d^3x + \right. \\
& - c_{\vec{k}, r}(t) c_{\vec{k}', r'}(t) (\vec{k} \wedge \vec{\varepsilon}_{\vec{k}, r}) \cdot (\vec{k}' \wedge \vec{\varepsilon}_{\vec{k}', r'}) \frac{1}{V} \iiint_V e^{i(+\vec{k}+\vec{k}') \cdot \vec{x}} d^3x + \\
& - c_{\vec{k}, r}^*(t) c_{\vec{k}', r'}^*(t) (\vec{k} \wedge \vec{\varepsilon}_{\vec{k}, r}) \cdot (\vec{k}' \wedge \vec{\varepsilon}_{\vec{k}', r'}) \frac{1}{V} \iiint_V e^{i(-\vec{k}-\vec{k}') \cdot \vec{x}} d^3x + \\
& \left. + c_{\vec{k}, r}^*(t) c_{\vec{k}', r'}(t) (\vec{k} \wedge \vec{\varepsilon}_{\vec{k}, r}) \cdot (\vec{k}' \wedge \vec{\varepsilon}_{\vec{k}', r'}) \frac{1}{V} \iiint_V e^{i(-\vec{k}+\vec{k}') \cdot \vec{x}} d^3x \right\}
\end{aligned}$$

Ricordando la definizione integrale della δ di Krönecker, moltiplicando e dividendo per $|\vec{k}||\vec{k}'|$ e ricordando che, per ogni \vec{k} , $\vec{\varepsilon}_{\vec{k}, 1}$, $\vec{\varepsilon}_{\vec{k}, 2}$ e $\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$ formano una terna ortonormale, si ha:

$$\begin{aligned}
H_B = & \frac{1}{2\mu_0} \sum_{\vec{k}, r, \vec{k}', r'} \left\{ c_{\vec{k}, r}(t) c_{\vec{k}', r'}^*(t) |\vec{k}||\vec{k}'| \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{rr'} + \right. \\
& + A(\vec{k}, r, \vec{k}', r') + B(\vec{k}, r, \vec{k}', r') + \\
& \left. + c_{\vec{k}, r}^*(t) c_{\vec{k}', r'}(t) |\vec{k}||\vec{k}'| \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{rr'} \right\} = \\
= & \frac{1}{2\mu_0} \sum_{\vec{k}, r} \left\{ |\vec{k}|^2 \left[c_{\vec{k}, r}(t) c_{\vec{k}, r}^*(t) + c_{\vec{k}, r}^*(t) c_{\vec{k}, r}(t) \right] \right\} + \\
& + \frac{1}{2\mu_0} \sum_{\vec{k}, r, \vec{k}', r'} \left\{ A(\vec{k}, r, \vec{k}', r') + B(\vec{k}, r, \vec{k}', r') \right\}
\end{aligned}$$

dove i termini $A(\vec{k}, r, \vec{k}', r')$ e $B(\vec{k}, r, \vec{k}', r')$ si annulleranno rispettivamente con i termini $C(\vec{k}, r, \vec{k}', r')$ e $D(\vec{k}, r, \vec{k}', r')$ che compariranno nel calcolo di H_E .

Per quanto riguarda il primo termine, ricordando che $c^2 |\vec{k}|^2 = \omega_k^2$ e che $c^{-2} = \mu_0 \varepsilon_0$ scriviamo:

$$H_B = \frac{\varepsilon_0}{2} \sum_{\vec{k}, r} \left\{ \omega_k^2 \left[c_{\vec{k}, r}(t) c_{\vec{k}, r}^*(t) + c_{\vec{k}, r}^*(t) c_{\vec{k}, r}(t) \right] \right\} + A + B \quad (35)$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2} \sum_{\vec{k}, r} \left\{ \omega_k^2 \left[c_{\vec{k}, r} c_{\vec{k}, r}^* + c_{\vec{k}, r}^* c_{\vec{k}, r} \right] \right\} + A + B \quad (36)$$

Si noti che erano possibili ulteriori piccole semplificazioni, che non faremo però per motivi che vi saranno chiari nel prossimo paragrafo. Si noti inoltre che per semplicità di notazione abbiamo indicato con A e B le sommatorie dei termini $A(\vec{k}, r, \vec{k}', r')$ e $B(\vec{k}, r, \vec{k}', r')$.

Ora occupiamoci del secondo termine:

$$\begin{aligned}
H_E &= \frac{\varepsilon_0}{2} \sum_{\vec{k}, r, \vec{k}', r'} \iiint_V \left\{ \left[\left(\frac{\partial c_{\vec{k}, r}(t)}{\partial t} \right) \vec{u}_{\vec{k}, r}(\vec{x}) + \left(\frac{\partial c_{\vec{k}, r}^*(t)}{\partial t} \right) \vec{u}_{\vec{k}, r}^*(\vec{x}) \right] \right. \\
&\quad \cdot \left. \left[\left(\frac{\partial c_{\vec{k}', r'}(t)}{\partial t} \right)^* \vec{u}_{\vec{k}', r'}(\vec{x}) + \left(\frac{\partial c_{\vec{k}', r'}^*(t)}{\partial t} \right)^* \vec{u}_{\vec{k}', r'}^*(\vec{x}) \right] \right\} d^3x = \\
&= \frac{\varepsilon_0}{2} \sum_{\vec{k}, r, \vec{k}', r'} \left\{ \left(\frac{\partial c_{\vec{k}, r}(t)}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial c_{\vec{k}', r'}(t)}{\partial t} \right) \iiint_V \vec{u}_{\vec{k}, r} \cdot \vec{u}_{\vec{k}', r'} d^3x + \right. \\
&\quad + \left(\frac{\partial c_{\vec{k}, r}(t)}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial c_{\vec{k}', r'}^*(t)}{\partial t} \right) \iiint_V \vec{u}_{\vec{k}, r} \cdot \vec{u}_{\vec{k}', r'}^* d^3x + \\
&\quad + \left(\frac{\partial c_{\vec{k}, r}^*(t)}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial c_{\vec{k}', r'}(t)}{\partial t} \right) \iiint_V \vec{u}_{\vec{k}, r}^* \cdot \vec{u}_{\vec{k}', r'} d^3x + \\
&\quad \left. + \left(\frac{\partial c_{\vec{k}, r}^*(t)}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial c_{\vec{k}', r'}^*(t)}{\partial t} \right) \iiint_V \vec{u}_{\vec{k}, r}^* \cdot \vec{u}_{\vec{k}', r'}^* d^3x \right\}
\end{aligned}$$

Dato che:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c_{\vec{k}, r}(t)}{\partial t} &= -i\omega_{\vec{k}} c_{\vec{k}, r} e^{-i\omega_{\vec{k}} t} = -i\omega_{\vec{k}} c_{\vec{k}, r}(t) \\
\frac{\partial c_{\vec{k}, r}^*(t)}{\partial t} &= +i\omega_{\vec{k}} c_{\vec{k}, r}^* e^{+i\omega_{\vec{k}} t} = +i\omega_{\vec{k}} c_{\vec{k}, r}^*(t)
\end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned}
H_E &= \frac{\varepsilon_0}{2} \sum_{\vec{k}, r, \vec{k}', r'} \left\{ \omega_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}'} c_{\vec{k}, r}(t) c_{\vec{k}', r'}^*(t) (\vec{\varepsilon}_{\vec{k}, r} \cdot \vec{\varepsilon}_{\vec{k}', r'}) \frac{1}{V} \iiint_V e^{i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{x}} d^3x + \right. \\
&\quad - \omega_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}'} c_{\vec{k}, r}(t) c_{\vec{k}', r'}(t) (\vec{\varepsilon}_{\vec{k}, r} \cdot \vec{\varepsilon}_{\vec{k}', r'}) \frac{1}{V} \iiint_V e^{i(\vec{k} + \vec{k}') \cdot \vec{x}} d^3x + \\
&\quad - \omega_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}'} c_{\vec{k}, r}^*(t) c_{\vec{k}', r'}^*(t) (\vec{\varepsilon}_{\vec{k}, r} \cdot \vec{\varepsilon}_{\vec{k}', r'}) \frac{1}{V} \iiint_V e^{i(-\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{x}} d^3x + \\
&\quad \left. + \omega_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}'} c_{\vec{k}, r}^*(t) c_{\vec{k}', r'}(t) (\vec{\varepsilon}_{\vec{k}, r} \cdot \vec{\varepsilon}_{\vec{k}', r'}) \frac{1}{V} \iiint_V e^{i(-\vec{k} + \vec{k}') \cdot \vec{x}} d^3x \right\}
\end{aligned}$$

Inoltre ricordando sempre che, per ogni \vec{k} , $\vec{\varepsilon}_{\vec{k}, 1}$, $\vec{\varepsilon}_{\vec{k}, 2}$ e $\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$ formano una terna ortogonale e ricordando anche le proprietà di ortogonalità di $\vec{u}_{\vec{k}, r}$, si ha:

$$\begin{aligned}
H_E &= \frac{\varepsilon_0}{2} \sum_{\vec{k}, r, \vec{k}', r'} \left\{ \omega_{\vec{k}} c_{\vec{k}, r}(t) \omega_{\vec{k}'} c_{\vec{k}', r'}^*(t) \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{rr'} + \right. \\
&\quad + C(\vec{k}, r, \vec{k}', r') + D(\vec{k}, r, \vec{k}', r') + \\
&\quad \left. + \omega_{\vec{k}} c_{\vec{k}, r}^*(t) \omega_{\vec{k}'} c_{\vec{k}', r'}(t) \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{rr'} \right\}
\end{aligned}$$

dove i termini $C(\vec{k}, r, \vec{k}', r')$ e $D(\vec{k}, r, \vec{k}', r')$ si annulleranno rispettivamente con i termini $A(\vec{k}, r, \vec{k}', r')$ e $B(\vec{k}, r, \vec{k}', r')$ visti precedentemente nel calcolo di H_B .

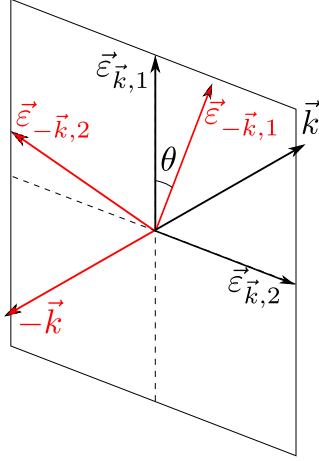


Figura 2: rappresentazione di due terne ortonormali relative a due vettori d'onda, \vec{k} e $-\vec{k}$.

Per il secondo termine possiamo perciò scrivere:

$$H_E = \frac{\varepsilon_0}{2} \sum_{\vec{k}, r} \left\{ \omega_k^2 \left[c_{\vec{k}, r}(t) c_{\vec{k}, r}^*(t) + c_{\vec{k}, r}^*(t) c_{\vec{k}, r}(t) \right] \right\} + C + D \quad (37)$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2} \sum_{\vec{k}, r} \left\{ \omega_k^2 \left[c_{\vec{k}, r} c_{\vec{k}, r}^* + c_{\vec{k}, r}^* c_{\vec{k}, r} \right] \right\} + C + D \quad (38)$$

Si noti inoltre che per semplicità di notazione abbiamo indicato con C e D le sommatorie dei termini $C(\vec{k}, r, \vec{k}', r')$ e $D(\vec{k}, r, \vec{k}', r')$.

L'energia contenuta nel volume V dovuta al campo classico di radiazione è data quindi da:

$$H = H_B + H_E = \varepsilon_0 \sum_{\vec{k}, r} \left\{ \omega_k^2 \left[c_{\vec{k}, r}(t) c_{\vec{k}, r}^*(t) + c_{\vec{k}, r}^*(t) c_{\vec{k}, r}(t) \right] \right\} + A + B + C + D \quad (39)$$

$$= \varepsilon_0 \sum_{\vec{k}, r} \left\{ \omega_k^2 \left[c_{\vec{k}, r} c_{\vec{k}, r}^* + c_{\vec{k}, r}^* c_{\vec{k}, r} \right] \right\} + A + B + C + D. \quad (40)$$

Mostriamo infine che sia il termine $A + C$ che il termine $B + D$ danno un contributo nullo. In entrambi i casi si hanno degli addendi della forma

$$- \left(\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \wedge \vec{\varepsilon}_{\vec{k}, r} \right) \cdot \left(\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \wedge \vec{\varepsilon}_{-\vec{k}, r'} \right) + (\vec{\varepsilon}_{\vec{k}, r} \cdot \vec{\varepsilon}_{-\vec{k}, r'})$$

Gli $\vec{\varepsilon}$ relativi a \vec{k} non devono essere per forza paralleli a quelli relativi a $-\vec{k}$. Devono però trovarsi sullo stesso piano e formare delle terne ortonormali destrorse, come mostrato in Fig. 2, dove l'angolo tra gli $\vec{\varepsilon}$ è indicato con θ . Si può mostrare che, per ogni scelta di r e r' , i due addendi si annullano. Facciamo il caso di $r = 1$ e $r' = 1$. Si ottiene

$$+(\vec{\varepsilon}_{\vec{k}, 2} \cdot \vec{\varepsilon}_{-\vec{k}, 2}) + (\vec{\varepsilon}_{\vec{k}, 1} \cdot \vec{\varepsilon}_{-\vec{k}, 1}) = -\cos \theta + \cos \theta = 0$$

Le altre combinazioni sono assolutamente analoghe.

Dato che i termini $A+B$ e $C+D$ si annullano, possiamo concludere che l'energia contenuta nel volume V dovuta al campo classico di radiazione è data da:

$$H = \varepsilon_0 \sum_{\vec{k},r} \left\{ \omega_k^2 \left[c_{\vec{k},r} c_{\vec{k},r}^* + c_{\vec{k},r}^* c_{\vec{k},r} \right] \right\}. \quad (41)$$

Ripetiamo ancora una volta che le piccole semplificazioni che si potrebbero fare non le facciamo per motivi che vi saranno chiari fra breve.

9 Quantizzazione del campo elettromagnetico

Fate caso ad una cosa:

$$\ddot{c}_{\vec{k},r}(t) = -\omega_k^2 c_{\vec{k},r}(t)$$

cioè $c_{\vec{k},r}(t)$ obbedisce all'equazione di un oscillatore armonico! Questo ci suggerisce naturalmente di tentare una descrizione in termini di oscillatori armonici. Definendo

$$c_{\vec{k},r}(t) = \frac{1}{2\omega_k \sqrt{\varepsilon_0}} (\omega_k q_{\vec{k},r} + i p_{\vec{k},r})$$

ove $q_{\vec{k},r}$ e $p_{\vec{k},r}$ sono due variabili canoniche coniugate generalizzate, si può scrivere

$$H = \sum_{\vec{k},r} \left(\frac{p_{\vec{k},r}^2}{2} + \frac{1}{2} \omega_k^2 q_{\vec{k},r}^2 \right)$$

cioè possiamo pensare l'energia del campo elettromagnetico come la somma delle energie di tanti oscillatori armonici, ognuno con una propria pulsazione di oscillazione (ω_k) lungo una certa direzione spaziale ($\vec{\varepsilon}_{\vec{k},r}$). Si faccia attenzione al fatto che questa q non ha niente a che spartire con il campo elettromagnetico, riguarda sono gli oscillatori armonici di cui noi immaginiamo composto il campo.

Oramai siamo giunti al nocciolo della questione! Dal caso classico a quello quantistico il passo è breve. Ci è naturale ora pensare che la strada per quantizzare il tutto è semplicemente quella di quantizzare gli oscillatori armonici di cui abbiamo parlato poco sopra.

Prima però chiariamo chi sono i nostri operatori, perché, come si sa, in meccanica quantistica le grandezze misurabili sono descritte da operatori. Gli operatori in questione, i nostri osservabili, naturalmente sono:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) \quad , \quad \vec{B}(\vec{x}, t)$$

e di conseguenza, data la loro definizione, anche:

$$\hat{\rho}(\vec{x}, t) \quad , \quad \vec{j}(\vec{x}, t) \quad , \quad \vec{A}(\vec{x}, t) \quad , \quad \hat{c}_{\vec{k},r}(t) \quad , \quad \hat{c}_{\vec{k},r}^\dagger(t)$$

ma si faccia attenzione che invece non sono osservabili \vec{x} e t .

Per quantizzare gli oscillatori armonici, e quindi far apparire l'hamiltoniana del campo elettromagnetico come una somma di hamiltoniane di oscillatori armonici quantizzati, ci basta definire $\hat{c}_{\vec{k},r}(t)$ come abbiamo fatto poco prima, tenendo però presente che stavolta \hat{q} e \hat{p} sono operatori.

Per aiutarci nell'introduzione delle condizioni di quantizzazione, introduciamo al posto di \hat{q} e \hat{p} altri due operatori che ben conoscete:

$$\hat{a}_{\vec{k},r}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}\hbar}} \left(\omega_{\vec{k}}\hat{q}_{\vec{k},r}(t) + i\hat{p}_{\vec{k},r}(t) \right), \quad \hat{a}_{\vec{k},r}^\dagger(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}\hbar}} \left(\omega_{\vec{k}}\hat{q}_{\vec{k},r}(t) - i\hat{p}_{\vec{k},r}(t) \right)$$

cioè l'operatore di *distruzione* e di *creazione*, soddisfacenti le regole di commutazione seguenti⁷

$$\begin{aligned} \left[\hat{a}_{\vec{k},r}(t), \hat{a}_{\vec{k}',r'}^\dagger(t) \right] &= \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{rr'} \hat{I} \\ \left[\hat{a}_{\vec{k},r}(t), \hat{a}_{\vec{k}',r'}(t) \right] &= \left[\hat{a}_{\vec{k},r}^\dagger(t), \hat{a}_{\vec{k}',r'}^\dagger(t) \right] = \hat{0} \end{aligned}$$

Quest'ultimi sono legati ai coefficienti $\hat{c}_{\vec{k},r}(t)$ dalle relazioni:⁸

$$\hat{c}_{\vec{k},r}(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega_{\vec{k}}}} \hat{a}_{\vec{k},r}(t), \quad \hat{c}_{\vec{k},r}^\dagger(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega_{\vec{k}}}} \hat{a}_{\vec{k},r}^\dagger(t) \quad (42)$$

Di conseguenza, sostituendo le (42) nella (41), l'hamiltoniana del campo elettromagnetico diventa:

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k},r} \left\{ \frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{2} \left[\hat{a}_{\vec{k},r}^\dagger(t)\hat{a}_{\vec{k},r}(t) + \hat{a}_{\vec{k},r}(t)\hat{a}_{\vec{k},r}^\dagger(t) \right] \right\} \quad (43)$$

Introducendo l'operatore *numero*⁹

$$\hat{N}_{\vec{k},r} = \hat{a}_{\vec{k},r}^\dagger(t)\hat{a}_{\vec{k},r}(t) \quad (44)$$

e ricordando che $[\hat{a}_{\vec{k},r}(t), \hat{a}_{\vec{k},r}^\dagger(t)] = \hat{I}$, si ha:

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k},r} \left\{ \hbar\omega_{\vec{k}} \left[\hat{N}_{\vec{k},r} + \frac{1}{2}\hat{I} \right] \right\} \quad (45)$$

Prima di analizzare questa hamiltoniana e discutere il suo significato fisico dobbiamo prima risolvere un pasticcio che ai più sarà sicuramente sfuggito. La sommatoria è estesa a tutti i possibili valori di \vec{k} che però, sono sì numerabili, ...ma infiniti! Di conseguenza il termine costante all'interno della sommatoria ci porterebbe a un'assurdità: una costante additiva *infinita* nell'hamiltoniana. Il problema è che noi siamo passati dalla meccanica classica alla meccanica quantistica. Invece, l'unico passaggio lecito è quello dalla meccanica quantistica a quella classica. Quindi passare da una hamiltoniana classica a una quantistica comporta un risultato *non univoco*.

$$H_{\text{classica}} \longrightarrow \hat{H}_{\text{quantistica}} + \text{COST}$$

⁷Si noti che le regole di commutazione sono date dal fatto che stiamo parlando di oscillatori armonici e che gli operatori in questione agiscono, avendo o \vec{k} o r diversi, su spazi diversi, che tradotto in parole fisiche vuol dire che gli oscillatori armonici sono indipendenti.

⁸Si faccia attenzione al fatto che stiamo lavorando nella rappresentazione di Heisenberg.

⁹Si noti che l'operatore numero non dipende dal tempo neanche nella rappresentazione di Heisenberg.

Ovviamente la non univocità non sarà in generale espressa da una semplice costante additiva, ma per i nostri scopi è sufficiente. Difatti ora basta dire che la costante è presa in modo da cancellare le infinitezze contenute nella (45) ed il gioco è fatto!

$$\hat{H}_{\text{EM}} = \sum_{\vec{k}, r} \left(\omega_{\vec{k}} \hat{N}_{\vec{k}, r} \right) \quad (46)$$

La (46) è l'hamiltoniana del campo elettromagnetico.

I suoi autostati sono ovviamente dati dal prodotto diretto dei singoli autostati di ogni oscillatore armonico quantizzato, che, cambiando opportunamente la notazione, possono essere scritti come:

$$|n_{\vec{k}_1, r_1}\rangle \otimes |n_{\vec{k}_2, r_2}\rangle \otimes \dots = |n_{\vec{k}_1, r_1}, n_{\vec{k}_2, r_2}, \dots\rangle \quad (47)$$

ove $n_{\vec{k}_i, r_i}$ è un numero intero che rappresenta il livello energetico dell' i -esimo oscillatore armonico oscillante sul piano ortogonale a \vec{k}_i e con direzione data da r_i , $(\vec{\varepsilon}_{\vec{k}_i, r_i})$. La corrispondente energia sarà:

$$\hat{H}_{\text{EM}} |n_{\vec{k}_1, r_1}, n_{\vec{k}_2, r_2}, \dots\rangle = E |n_{\vec{k}_1, r_1}, n_{\vec{k}_2, r_2}, \dots\rangle \quad (48)$$

con E dato da:

$$E = \sum_{\vec{k}, r} \left(\hbar \omega_{\vec{k}} n_{\vec{k}, r} \right) = \sum_{i=1}^M \left(\hbar \omega_{\vec{k}_i} n_{\vec{k}_i, r_i} \right) \quad (49)$$

ove M è il numero totale di oscillatori che non si trovano nello stato fondamentale.

Un'altra e più interessante interpretazione degli $n_{\vec{k}, r}$ è quella di identificarli con il numero di *quanti*, che per il campo elettromagnetico vengono chiamati *fotoni*, aventi numero d'onda \vec{k} e polarizzazione r . $n_{\vec{k}, r}$ prenderà pertanto il nome naturale di *numero di occupazione*. Lo stato fondamentale sarà quindi quello in cui non ci sarà alcun fotone, cioè il vuoto assoluto:

$$|0, 0, 0, \dots\rangle = |0\rangle \quad , \quad E_{\text{vuoto}} = 0 \quad (50)$$

Gli operatori $\hat{a}_{\vec{k}, r}$ e $\hat{a}_{\vec{k}, r}^\dagger$ acquistano in questo contesto la proprietà rispettivamente di distruggere e di creare un fotone di numero d'onda \vec{k} e polarizzazione r , per questo vengono chiamati operatori di *distruzione* e di *creazione*. Ora si capisce anche che ogni stato del campo elettromagnetico può essere ottenuto a partire dallo stato fondamentale applicando gli operatori $\hat{a}_{\vec{k}, r}^\dagger$ opportunamente.

$$|n_{\vec{k}_1, r_1}, n_{\vec{k}_2, r_2}, \dots\rangle = \left\{ \prod_i \frac{1}{\sqrt{n_{\vec{k}_i, r_i}!}} \left(\hat{a}_{\vec{k}_i, r_i}^\dagger \right)^{n_{\vec{k}_i, r_i}} \right\} |0\rangle$$

A questo punto è interessante far notare come il fatto che l'energia del vuoto sia zero, non è solo un caso dovuto all'eliminazione (peraltro molto barbara) della costante infinita nell'energia, bensì è una condizione necessaria! Difatti il vuoto corrisponde a zero fotoni, numero che deve essere lo stesso indipendentemente dal sistema di riferimento da cui lo si osserva. Questo significa che se il vuoto non avesse energia zero il quadrivettore impulso-energia cambierebbe a seconda del sistema di riferimento! L'unica possibilità è che appunto il quadrivettore sia identicamente nullo, il che comporta energia pari a zero.

Il numero di occupazione $n_{\vec{k},r_i}$, siccome può assumere qualsiasi valore intero maggiore o uguale a zero, ci suggerisce che i fotoni sono *bosoni*, cioè particelle che obbediscono alla statistica di Bose–Einstein. Questo fatto ci permette di pensare alla radiazione elettromagnetica come a un gas perfetto (si ricordi che gli oscillatori armonici sono disaccoppiati) di bosoni di spin 1.¹⁰

D'ora in poi, quando tratteremo sistemi fisici riguardanti l'interazione fra cariche, dovremo scrivere l'hamiltoniana con i termini soliti, quali l'energia cinetica delle particelle e l'interazione elettromagnetica fra di esse, però dovremo aggiungere un nuovo addendo che sarà la nostra hamiltoniana del campo elettromagnetico (la si può pensare come l'energia cinetica dei fotoni. Manca il termine potenziale perché i fotoni non interagiscono fra loro).

Ora che abbiamo quantizzato l'hamiltoniana del campo elettromagnetico, vediamo come si trasformano di necessità le altre grandezze fisiche, prima di tutte il potenziale vettore:

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{k},r} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}} \vec{\varepsilon}_{\vec{k},r} \left[\hat{a}_{\vec{k},r}(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \hat{a}_{\vec{k},r}^\dagger(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right] = \quad (51)$$

$$= \sum_{\vec{k},r} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}} \vec{\varepsilon}_{\vec{k},r} \left[\hat{a}_{\vec{k},r} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega_{\vec{k}}t)} + \hat{a}_{\vec{k},r}^\dagger e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega_{\vec{k}}t)} \right] = \quad (52)$$

$$= \vec{A}^+(\vec{x}, t) + \vec{A}^-(\vec{x}, t) \quad (53)$$

Poi il campo magnetico usando la (17):

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = +i \sum_{\vec{k},r} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}} (\vec{k} \wedge \vec{\varepsilon}_{\vec{k},r}) \left[\hat{a}_{\vec{k},r}(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} - \hat{a}_{\vec{k},r}^\dagger(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right] \quad (54)$$

E infine il campo elettrico usando la (18):

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = -i \sum_{\vec{k},r} \sqrt{\frac{\omega_{\vec{k}}}{2V}} \vec{\varepsilon}_{\vec{k},r} \left[\hat{a}_{\vec{k},r}(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} - \hat{a}_{\vec{k},r}^\dagger(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right] \quad (55)$$

Guardando alle precedenti espressioni, usando le semplici regole di commutazione degli operatori di creazione e distruzione con l'operatore numero, si osserva che:

$$\left[\hat{E}_i, \hat{N}_{\vec{k},r} \right] \neq \hat{0} \quad , \forall i$$

$$\left[\hat{B}_i, \hat{N}_{\vec{k},r} \right] \neq \hat{0} \quad , \forall i$$

Questo significa che non si può conoscere contemporaneamente con precisione infinita il numero di fotoni, caratterizzati da un certo \vec{k} e da un certo r , e il campo magnetico e/o il campo elettrico. Inoltre il valor medio del campo elettrico o magnetico su di uno stato con un numero definito di fotoni (il conto è semplicissimo) è sempre nullo.

Per concludere diciamo che, essendo:

$$\left[\hat{H}, \hat{N}_{\vec{k},r} \right] = \hat{0} \quad ,$$

¹⁰Che il fotone abbia spin pari a uno è stato dimostrato sperimentalmente da Raman e Bhagavantam nel 1931. Le due proiezioni dello spin, +1 e -1, corrispondono alle due polarizzazioni circolari mentre la proiezione 0 non è permessa perché il fotone è a massa nulla.

il numero di fotoni in ogni modo di oscillazione per il campo di radiazione rimane costante nel tempo! Per poter cambiare uno qualsiasi dei numeri di occupazione abbiamo quindi bisogno di una interazione che renda il commutatore tra \hat{H} e $\hat{N}_{\vec{k},r}$ diverso da zero. Questo ci introduce naturalmente al prossimo argomento: l'interazione fra il campo elettromagnetico e un sistema di cariche elettriche.

10 Seconda quantizzazione

Spesso quando si quantizzano i campi si parla di *seconda quantizzazione*. Infatti si usa il termine *prima quantizzazione* quando si tratta una particella in maniera quantistica e i potenziali in maniera classica. Si parla invece di *seconda quantizzazione* quando si tratta tutto in maniera quantistica. Questi termini hanno origini storiche e dovrebbero essere abbandonati. Molto meglio usare termini quali *meccanica quantistica non-relativistica* e *teoria quantistica dei campi*.

Si capì che la relatività speciale era inconsistente con la meccanica quantistica usata fino ad allora per descrivere particelle singole non-relativistiche. Un nuovo formalismo era quindi necessario per descrivere sistemi in cui le particelle potevano essere create o distrutte, come per esempio, nel caso del campo elettromagnetico considerato come un insieme di fotoni.

Quando la procedura di quantizzazione canonica è applicata alle teorie di campo, le variabili del campo classico diventano operatori. L'ampiezza del campo classico diventa quantizzata e i quanti sono identificati con particelle fisiche. Attualmente tutte le particelle sono descritte relativisticamente da campi quantizzati.

L'equazione classica del moto di un campo è tipicamente identica all'equazione per la funzione d'onda di uno dei suoi quanti una volta che il campo è stato quantizzato. Per esempio, l'equazione di Klein-Gordon è l'equazione classica del moto di un campo scalare libero ma è anche l'equazione quantistica per una funzione d'onda di una particella scalare. Questo significa che quantizzare un campo appariva simile a quantizzare una teoria che era già stata quantizzata. In pratica era come prendere la funzione d'onda e farla diventare un operatore. Da qui il termine *seconda quantizzazione*.

11 Riferimenti

1. Sommatoria a infiniti termini si può tirare fuori dall'integrale?
2. Quantizzazione del campo elettromagnetico su Wikipedia:
http://en.wikipedia.org/wiki/Quantization_of_the_electromagnetic_field
http://it.wikipedia.org/wiki/Quantizzazione_del_campo_elettromagnetico
3. Piccolo articolo che tratta la quantizzazione del campo elettromagnetico in maniera molto discorsiva:
http://homepage.mac.com/marco_coisson/.../Quantizzazione...pdf
4. Storia commentata della quantizzazione del campo elettromagnetico e della nascita della QED:
http://www.luisabonolis.it/CV%20Italian_files/BONOLIS_QED_AIF.pdf
http://www.lfns.it/.../SB2004_Quantizzazione_campo_em.ppt

5. Approfondita discussione sulla quantizzazione del campo elettromagnetico divisa in 6 articoli: <http://daarb.narod.ru/qed-eng.html>;
6. Prima e seconda quantizzazione:
“Quantization (First, Second)” di Helge Kragh
7. Il fotone su Wikipedia Inglese: <http://en.wikipedia.org/wiki/Photon>
8. Appunti sulla Meccanica Quantistica Relativistica:
<http://piccardi.gnulinix.it/files/2011/02/relmecquant.pdf>
9. Se è vero che gli stati di polarizzazione fisicamente più naturali per descrivere un fotone sono quelli con polarizzazione circolare (destrorsa e sinistrorsa) perché abbiamo fatto tutti i calcoli usando polarizzazioni lineari? Si potrebbero rifare tutti i passaggi in questo caso?