

Interazione radiazione–materia

Francesco Biccari, Roma, 26 dicembre 2007

1 Principio di minima sostituzione

In questa sezione giustificheremo uno dei principi che avrete già sentito e usato tante volte ma che nessuno vi ha mai dimostrato. Si tratta del *principio di minima sostituzione*.

Una particella carica di massa m e carica elettrica q immersa in un campo elettromagnetico obbedisce all'equazione di Lorentz:

$$m\ddot{\vec{x}}(t) = q\vec{E} + q\dot{\vec{x}} \wedge \vec{B} \quad (1)$$

Riscriviamo la (1) in termini del potenziale vettore $\vec{A}(\vec{x}, t)$ e del potenziale scalare $\varphi(\vec{x}, t)$:

$$m\ddot{\vec{x}}(t) = q \left[-\vec{\nabla}\varphi - \dot{\vec{A}} + \dot{\vec{x}} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \right] \quad (2)$$

La lagrangiana che descrive il moto di questa particella è data da:

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \frac{1}{2}m(\dot{\vec{x}})^2 - q\varphi + q(\vec{A} \cdot \dot{\vec{x}}) = T(\dot{\vec{x}}) + U(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) \quad (3)$$

con U potenziale generalizzato. Per verificare che questa sia la giusta lagrangiana basta applicare le regole che tirano fuori le equazioni del moto¹; si troverà ovviamente la (2).

L'hamiltoniana corrispondente è data, come ben sapete, da:

$$H(\vec{x}, \vec{p}) = \vec{p} \cdot \dot{\vec{x}}(\vec{p}, \vec{x}) - L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}(\vec{p}, \vec{x})) \quad (4)$$

ove \vec{p} è il momento coniugato alla coordinata \vec{x} definito ovviamente come:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \quad (5)$$

da cui:

$$\vec{p}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = m\dot{\vec{x}} + q\vec{A}(\vec{x}, t) \quad (6)$$

Sviluppando la (4) si ha:

$$H(\vec{x}, \vec{p}) = \frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{A}(\vec{x}, t))^2 + q\varphi(\vec{x}, t) \quad (7)$$

¹ $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$; per una derivazione diretta della lagrangiana in questione si veda per esempio Goldstein, Meccanica Classica, pagg 19 ÷ 22.

Scritta nelle vecchie variabili diventa:

$$H(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \frac{1}{2}m (\dot{\vec{x}})^2 + q\varphi(\vec{x}, t) = T + V \quad (8)$$

Ora si capisce che l'hamiltoniana di una particella immersa in un campo elettromagnetico può essere pensata come l'hamiltoniana di particella libera in cui sia stato aggiunto un potenziale $V = q\varphi$ e sia stata effettuata la sostituzione²:

$$\vec{p}_{libera} \longrightarrow \vec{p} - q\vec{A} \quad (9)$$

ove \vec{p}_{libera} è la variabile coniugata a \vec{x} nel caso libero, ovviamente data da $\vec{p} = m\dot{\vec{x}}$.

Da qui il nome di *principio di minima sostituzione*.

Supponiamo inoltre che tale principio sia vero anche in meccanica quantistica.

2 Hamiltoniana di un sistema di cariche elettriche

Ora faremo un calcolo che avrete già visto a *struttura della materia* con qualche piccola modifica.

Passando alla meccanica quantistica si ha ovviamente che:

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_i] = +i\hat{I} \quad (10)$$

da cui deriva la ben nota espressione operatoriale del momento:

$$\vec{\hat{p}} = -i\vec{\nabla} \quad (11)$$

Sostituendo la (11) nella (7) e facendo banali passaggi già fatti a *struttura della materia* si ottiene:

$$\hat{H} = \frac{\vec{\hat{p}}^2}{2m} - \frac{q}{m} (\vec{\hat{A}} \cdot \vec{\hat{p}}) + \frac{q^2}{2m} \vec{\hat{A}}^2 + q\hat{\varphi} \quad (12)$$

Passando ora a considerare N particelle cariche, usando la (12) si ha:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{H}_{el} + \hat{H}_{int} + \hat{H}_{field} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int} \quad (13) \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^N \frac{\vec{\hat{p}}_i^2}{2m_i}}_{\hat{H}_{el}} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i, j=1}^N \frac{q_i q_j}{|\vec{\hat{x}}_i - \vec{\hat{x}}_j|} + \underbrace{\sum_{i=1}^N \left[-\frac{q_i}{m_i} (\vec{\hat{A}} \cdot \vec{\hat{p}}) + \frac{q_i}{2m_i} \vec{\hat{A}}^2 \right]}_{\hat{H}_{int}} + \end{aligned}$$

²Si noti che la (9) corrisponde alla (6).

$$+ \underbrace{\sum_{\vec{k}} \sum_r \omega_{\vec{k}} \hat{N}_{\vec{k},r}}_{\hat{H}_{field}} \quad (14)$$

La (13) è l'hamiltoniana di un sistema di cariche elettriche di carica q_i e massa m_i interagenti con il campo elettromagnetico³. È stata scritta volutamente come somma di due termini per ragioni che avrete già capito. Se non l'avete capito ve lo dico io: è perché andremo a usare la teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo trattando \hat{H}_{int} come perturbazione!

Si noti che questa è la stessa identica espressione data a *struttura della materia* con in più \hat{H}_{field} .

3 Emissione e assorbimento di fotoni

Come abbiamo visto il numero totale di fotoni in ogni modo di vibrazione si conserva per il campo e.m. libero. Pertanto per far variare questo numero abbiamo bisogno di una interazione del campo e.m. con qualcos'altro. È proprio per questo che ci siamo proposti di analizzare l'interazione del campo e.m. con un sistema di cariche elettriche.

Vogliamo limitarci a considerare l'assorbimento e l'emissione di *un solo* fotone⁴.

Quello a cui siamo interessati è la probabilità in funzione del tempo di assorbire o emettere un fotone. Per far questo useremo la *seconda regola d'oro di Fermi*⁵.

Ora si comincia!

³La (13) poteva essere ottenuta anche in una maniera un po' più rigorosa (vedi Mandl & Shaw, quantum field theory, pagg 15÷19) andando a calcolare l'energia del sistema di particelle più quella del campo e.m. Cioè: H_{libera} con la minima sostituzione (che porta H_{int} e il primo addendo di H_{el}), più $H_{e.m.}$ distinguendo tra campo elettrico trasverso e campo elettrico longitudinale; il primo, con l'aggiunta del campo magnetico, porterà alla classica espressione dell'energia del campo e.m. libero, mentre il secondo porterà all'energia coulombiana di un sistema di cariche (il secondo addendo di H_{el}).

⁴Questo è il processo contrario a quanto avete fatto a *struttura della materia*. Infatti là avevate trascurato i termini in A^2 e così vi veniva l'assorbimento e l'emissione di un solo fotone alla volta. Qua invece assumiamo di voler osservare solo processi ad un fotone che ci porterà a trascurare i termini in A^2 .

⁵Anche in questo caso procediamo in senso inverso rispetto a quello che avete visto a *struttura della materia*. Li usavamo la teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo e calcolavamo il modulo quadro del coefficiente dello sviluppo al primo ordine e vedevamo che alla fine si ritrovava la seconda regola d'oro di Fermi per quel particolare caso. Qui invece partiamo direttamente dalla seconda regola d'oro di Fermi.

Gli autostati di \hat{H}_0 saranno dati ovviamente da:

$$|A\rangle \otimes |\dots, n_{\vec{k},r}, \dots\rangle \quad (15)$$

ove $|A\rangle$ è un autostato di \hat{H}_{el} e $|\dots, n_{\vec{k},r}, \dots\rangle$ un autostato di \hat{H}_{field} , dove abbiamo focalizzato l'attenzione su un particolare numero di occupazione.

La seconda regola d'oro di Fermi, che descrive la probabilità di transizione in funzione del tempo al primo ordine tra due autostati dovuta ad una perturbazione esterna dipendente dal tempo, è data da:

$$W_{i \rightarrow f} = 2\pi |M_{if}|^2 \delta(E_i - E_f) \quad (16)$$

I nostri autostati iniziale e finale di \hat{H}_0 sono dati da:

<i>Assorbimento</i>	<i>Emissione</i>
$ i\rangle = A\rangle \otimes \dots, n_{\vec{k},r}, \dots\rangle$	$ i\rangle = A\rangle \otimes \dots, n_{\vec{k},r}, \dots\rangle$
$ f\rangle = B\rangle \otimes \dots, n_{\vec{k},r} - 1, \dots\rangle$	$ f\rangle = B\rangle \otimes \dots, n_{\vec{k},r} + 1, \dots\rangle$
$E_i - E_f = E_A - E_B + \omega_{\vec{k}}$	$E_i - E_f = E_A - E_B - \omega_{\vec{k}}$

Aver scelto tali autostati implica che nel calcolo di M_{if} spariscano i termini mediati di \vec{A}^2 dato che questo termine implica salti di zero o di due fotoni, ma non di uno, come è facile vedere guardando allo sviluppo in serie di Fourier di \vec{A} .

Ora non ci resta che calcolare $|M_{if}|^2$ nei due casi. Si ricordi che l'elemento di matrice si riferisce alla perturbazione espressa nella *rappresentazione di interazione*.

$$\begin{aligned} M_{if} &= \langle f | \hat{H}_{int} | i \rangle = \\ &= \langle f | \left\{ - \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{m_i} \left(\vec{A} \cdot \vec{p}_i \right) \right\} | i \rangle = \\ &= \langle f | \left\{ - \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{m_i} \left(\left(\sum_{\vec{k}} \sum_r \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}} \vec{\varepsilon}_{\vec{k},r} \left[\hat{a}_{\vec{k},r} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x}_i - \omega_{\vec{k}}t)} + \hat{a}_{\vec{k},r}^\dagger e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x}_i - \omega_{\vec{k}}t)} \right] \right) \cdot \vec{p}_i \right) \right\} | i \rangle \end{aligned}$$

Ove abbiamo esplicitato \vec{A} . Ora, usando le espressioni di $|i\rangle$ e $|f\rangle$ per l'assorbimento e ricordando che \vec{p} non agisce sui ket di \hat{H}_{field} , si ha:

$$M_{if}^{assorbimento} = - \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}} \sqrt{n_{\vec{k},r}} e^{-i\omega_{\vec{k}}t} \vec{\varepsilon}_{\vec{k},r} \cdot \langle B | \left\{ \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{m_i} e^{+i\vec{k} \cdot \vec{x}_i} \vec{p}_i \right\} | A \rangle \quad (17)$$

e analogamente per l'emissione:

$$M_{if}^{emissione} = -\frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}} \sqrt{n_{\vec{k},r} + 1} e^{+i\omega_{\vec{k}}t} \vec{\varepsilon}_{\vec{k},r} \cdot \langle B | \left\{ \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{m_i} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}_i} \vec{p}_i \right\} | A \rangle \quad (18)$$

Prima di continuare si noti una cosa importantissima. Al contrario di quanto visto a *struttura della materia* dove l'emissione spontanea viene introdotta ad hoc per far tornare la teoria con le osservazioni sperimentali, qui invece esce fuori in maniera del tutto naturale! Questo si vede dal fatto che facendo il modulo quadro della (17) e della (18) salta immediatamente all'occhio che la seconda è diversa da zero anche quando il campo si trova nello stato fondamentale! Insomma c'è una asimmetria di fondo!⁶

4 L'approssimazione di dipolo elettrico

Tornando a noi facciamo la ben nota approssimazione già incontrata a *struttura della materia*: l'approssimazione di dipolo elettrico. Se si è nel caso in cui la lunghezza d'onda λ della radiazione e.m., cioè $\frac{1}{|k|}$, sia molto maggiore delle dimensioni lineari del sistema di cariche in questione, quindi della variabilità di $|x|$, si può effettuare l'approssimazione:

$$e^{\pm i\vec{k}\cdot\vec{x}} \simeq 1 \quad (19)$$

Questo significa che la variazione spaziale di \vec{A} a t fissato è irrilevante nel volume occupato dal nostro sistema di cariche, insomma praticamente \vec{A} è costante su questo volume a t fissato. Si noti che questa approssimazione è lecita nel caso di radiazione luminosa o U.V. e in cui il sistema di cariche sia un atomo o una molecola. Perché questa approssimazione assume questo nome sarà chiaro fra breve.

⁶Possiamo fare in proposito un conto molto carino che descrive quale deve essere il numero medio di occupazione per un gas all'equilibrio. La variazione nel tempo della differenza tra atomi che si trovano nello stato eccitato e atomi che si trovano nello stato fondamentale (supponendo che ci siano solamente due stati energetici disponibili: 0 e 1) deve essere zero se il gas si trova all'equilibrio: $\frac{\Delta n}{\Delta t} = 0$. Sappiamo inoltre che $\frac{\Delta n}{\Delta t} = P_{em}N_1 - P_{ass}N_0$. Ove N_0 e N_1 rappresentano il numero degli atomi che si trovano rispettivamente nello stato fondamentale e nello stato eccitato. Ora da quanto abbiamo appena visto $P_{em} = \text{cost}(n+1)$ e $P_{ass} = \text{cost}(n)$. Da tutto questo deriva che $\frac{N_0}{N_1} = \frac{n+1}{n}$ che è la ben nota relazione di Einstein. Ora tiriamo in causa il vecchio Boltzmann che ci dice che per un gas all'equilibrio si deve avere $\frac{N_0}{N_1} = \frac{Ne^{-\frac{E_0}{K^T}}}{Ne^{-\frac{E_1}{K^T}}} = e^{\frac{\omega}{K^T}}$. Uguagliando si ha alla fine: $n = \frac{1}{e^{\frac{\omega}{K^T}} + 1}$, che è la ben nota distribuzione di Bose!!!

Con questa approssimazione si ottiene:

$$M_{if}^{assorbimento} = -\frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}} \sqrt{n_{\vec{k},r}} e^{-i\omega_{\vec{k}}t} \vec{\varepsilon}_{\vec{k},r} \cdot \langle B | \left\{ \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{m_i} \vec{p}_i \right\} | A \rangle \quad (20)$$

$$M_{if}^{emissione} = -\frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}} \sqrt{n_{\vec{k},r} + 1} e^{+i\omega_{\vec{k}}t} \vec{\varepsilon}_{\vec{k},r} \cdot \langle B | \left\{ \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{m_i} \vec{p}_i \right\} | A \rangle \quad (21)$$

Ora esprimiamo l'ultimo elemento di matrice in un altro modo che ci chiarirà molte cose:⁷

$$\begin{aligned} \langle B | \left\{ \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{m_i} \vec{p}_i \right\} | A \rangle &= \langle B | \left\{ \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{m_i} m_i \dot{\vec{x}}_i \right\} | A \rangle = \\ &= \langle B | \left\{ \sum_{i=1}^N q_i \dot{\vec{x}}_i \right\} | A \rangle = \\ &= \langle B | \left\{ \sum_{i=1}^N q_i i [\hat{H}_0, \vec{x}_i] \right\} | A \rangle = \\ &= i(E_B - E_A) \langle B | \left\{ \sum_{i=1}^N q_i \vec{x}_i \right\} | A \rangle = \\ &= \pm i\omega_{\vec{k}} \vec{D}_{AB} \quad (+ : \text{assorbimento}, - : \text{emissione}) \end{aligned}$$

Ove è stato introdotto l'*operatore di dipolo elettrico* definito (nella rappresentazione di interazione) come:

$$\vec{D} = \sum_{i=1}^N q_i \vec{x}_i \quad (22)$$

e ove si è indicato con \vec{D}_{AB} l'elemento di matrice di tale operatore tra gli stati $|A\rangle$ e $|B\rangle$.

Quindi usando questo nuovo risultato si ha:

$$M_{if}^{assorbimento} = -i\sqrt{\frac{\omega_{\vec{k}}}{2V}} \sqrt{n_{\vec{k},r}} e^{-i\omega_{\vec{k}}t} (\vec{\varepsilon}_{\vec{k},r} \cdot \vec{D}_{AB}) \quad (23)$$

$$M_{if}^{emissione} = +i\sqrt{\frac{\omega_{\vec{k}}}{2V}} \sqrt{n_{\vec{k},r} + 1} e^{+i\omega_{\vec{k}}t} (\vec{\varepsilon}_{\vec{k},r} \cdot \vec{D}_{AB}) \quad (24)$$

⁷Ricordatevi che siamo nella rappresentazione di interazione e che in questa rappresentazione $\frac{d\hat{O}_{INT}}{dt} = i[\hat{H}_0, \hat{O}_{INT}]$. Inoltre ricordatevi che la delta di Dirac delle precedenti espressioni impone che $\omega_{\vec{k}} = |E_A - E_B|$.

Ora calcoliamo finalmente, tramite la (16), la probabilità di transizione in funzione del tempo, o in altre parole, la probabilità di assorbimento o di emissione di un fotone di impulso \vec{k} e polarizzazione $\vec{\varepsilon}_{\vec{k},r}$ in funzione del tempo.

$$W_{i \rightarrow f}^{assorbimento}(\vec{k}, r) = 2\pi \frac{\omega_{\vec{k}}}{2V} (n_{\vec{k},r}) \left| \vec{\varepsilon}_{\vec{k},r} \cdot \vec{D}_{AB} \right|^2 \delta(E_A - E_B + \omega_{\vec{k}}) \quad (25)$$

$$W_{i \rightarrow f}^{emissione}(\vec{k}, r) = 2\pi \frac{\omega_{\vec{k}}}{2V} (n_{\vec{k},r} + 1) \left| \vec{\varepsilon}_{\vec{k},r} \cdot \vec{D}_{AB} \right|^2 \delta(E_A - E_B - \omega_{\vec{k}}) \quad (26)$$

5 Emissione e assorbimento indipendenti da \mathbf{k}

Finora ci siamo concentrati sulla conoscenza della probabilità di emissione e assorbimento di un fotone ben definito, cioè di vettore d'onda \vec{k} e polarizzazione $\vec{\varepsilon}_{\vec{k},r}$. All'atto pratico questa visione delle cose non è molto interessante. Ora infatti ci proponiamo di ricavare le probabilità di assorbimento e di emissione indipendentemente dalla vettore d'onda e dalla polarizzazione.

Prima di tutto togliamo di mezzo la polarizzazione, cioè fissato \vec{k} , siamo interessati a conoscere la probabilità che un fotone venga assorbito o emesso indipendentemente dalla sua polarizzazione. Quindi non dobbiamo far altro che sommare su r .

$$W_{i \rightarrow f}^{assorbimento}(\vec{k}) = 2\pi \frac{\omega_{\vec{k}}}{2V} \delta(E_A - E_B + \omega_{\vec{k}}) \sum_{r=1}^2 (n_{\vec{k},r}) \left| \vec{\varepsilon}_{\vec{k},r} \cdot \vec{D}_{AB} \right|^2 \quad (27)$$

$$W_{i \rightarrow f}^{emissione}(\vec{k}) = 2\pi \frac{\omega_{\vec{k}}}{2V} \delta(E_A - E_B - \omega_{\vec{k}}) \sum_{r=1}^2 (n_{\vec{k},r} + 1) \left| \vec{\varepsilon}_{\vec{k},r} \cdot \vec{D}_{AB} \right|^2 \quad (28)$$

Poi rendiamo indipendenti le precedenti espressioni dal vettore \vec{k} integrando su tutto lo spazio delle fasi accessibile. Si ha ovviamente che:

$$\frac{1}{h^3} V \sum_{\vec{k}} \longrightarrow \frac{1}{h^3} V \iiint d^3k$$

avendo fatto il limite in cui $V \rightarrow +\infty$. Considerando che nel nostro sistema di unità di misura $\hbar = 1$ e passando in coordinate sferiche si ha:

$$\frac{1}{(2\pi)^3} V \iiint k^2 dk d\Omega_{\vec{k}}$$

Integrando solo sul modulo di \vec{k} si ottiene la probabilità in funzione della direzione di \vec{k} :

$$\frac{W_{i \rightarrow f}^{assorbimento}}{d\Omega_{\vec{k}}} = \frac{1}{(2\pi)^3} V \int_0^{+\infty} k^2 2\pi \frac{\omega_{\vec{k}}}{2V} \delta(E_A - E_B + \omega_{\vec{k}}) \sum_{r=1}^2 (n_{\vec{k},r}) \left| \vec{\varepsilon}_{\vec{k},r} \cdot \vec{D}_{AB} \right|^2 dk$$

$$\frac{W_{i \rightarrow f}^{emissione}}{d\Omega_{\vec{k}}} = \frac{1}{(2\pi)^3} V \int_0^{+\infty} k^2 2\pi \frac{\omega_{\vec{k}}}{2V} \delta(E_A - E_B - \omega_{\vec{k}}) \sum_{r=1}^2 (n_{\vec{k},r} + 1) \left| \vec{\varepsilon}_{\vec{k},r} \cdot \vec{D}_{AB} \right|^2 dk$$

da cui con semplici passaggi:

$$\frac{W_{i \rightarrow f}^{assorbimento}}{d\Omega_{\vec{k}}} = \frac{\omega_{AB}^3}{8\pi^2} \sum_{r=1}^2 (n_{\vec{k},r}) \left| \vec{\varepsilon}_{\vec{k},r} \cdot \vec{D}_{AB} \right|^2 \quad (29)$$

$$\frac{W_{i \rightarrow f}^{emissione}}{d\Omega_{\vec{k}}} = \frac{\omega_{AB}^3}{8\pi^2} \sum_{r=1}^2 (n_{\vec{k},r} + 1) \left| \vec{\varepsilon}_{\vec{k},r} \cdot \vec{D}_{AB} \right|^2 \quad (30)$$

ricordando che $\omega_{\vec{k}} = |\vec{k}|$ e avendo chiamato ω_{AB} la differenza di energia fra i livelli A e B . Inoltre, nonostante non sia stato indicato nelle formule precedenti per non appesantire la notazione, è ovvio che ora $n_{\vec{k},r}$ si riferisce al numero di fotoni con il modulo di \vec{k} fissato e pari a ω_{AB} e con direzione e verso di \vec{k} variabili. Per $\vec{\varepsilon}_{\vec{k},r}$ invece l'integrazione non ha portato a fissare alcun valore dato che, come è stato già ricordato, $\vec{\varepsilon}_{\vec{k},r}$ dipende solo dalla direzione e dal verso di \vec{k} .

Questo è il massimo che possiamo fare in maniera del tutto generale. Ora invece ci concentreremo su un caso particolare, ma in fondo il più significativo, quello dell'*emissione spontanea* ($n_{\vec{k},r} = 0$).

6 L'emissione spontanea

Consideriamo la (30) e poniamo $n_{\vec{k},r} = 0$. Si ottiene:

$$\frac{W_{i \rightarrow f}^{emissione spontanea}}{d\Omega_{\vec{k}}} = \frac{\omega_{AB}^3}{8\pi^2} \sum_{r=1}^2 \left| \vec{\varepsilon}_{\vec{k},r} \cdot \vec{D}_{AB} \right|^2 \quad (31)$$

La ben nota *relazione di completezza* ci dice che, presi 3 versori mutuamente ortogonali qualsiasi nello spazio, \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} , si ha:

$$a^i a^j + b^i b^j + c^i c^j = \delta^{ij}$$

ove i e j sono le componenti cartesiane dei versori e δ^{ij} è la delta di Krönecker. Applicata al nostro caso, ricordando che, a \vec{k} fissato, $\vec{\varepsilon}_{\vec{k},1}$, $\vec{\varepsilon}_{\vec{k},2}$ e $\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$ formano una base ortonormale, la si può riarrangiare così:

$$\sum_{r=1}^2 \varepsilon_{\vec{k},r}^i \varepsilon_{\vec{k},r}^j = \delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{|\vec{k}|^2} \quad (32)$$

Usando la (32), la (30) diventa:

$$\begin{aligned}
\frac{W_{i \rightarrow f}^{emissione\ spontanea}}{d\Omega_{\vec{k}}} &= \frac{\omega_{AB}^3}{8\pi^2} \sum_{r=1}^2 (\vec{\varepsilon}_{\vec{k},r} \cdot \vec{D}_{AB}) (\vec{\varepsilon}_{\vec{k},r} \cdot \vec{D}_{AB})^* = \\
&= \frac{\omega_{AB}^3}{8\pi^2} \sum_{r=1}^2 \left(\sum_{i=1}^3 \varepsilon_{\vec{k},r}^i D_{AB}^{i*} \right) \left(\sum_{j=1}^3 \varepsilon_{\vec{k},r}^j D_{AB}^j \right) = \\
&= \frac{\omega_{AB}^3}{8\pi^2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{r=1}^2 \varepsilon_{\vec{k},r}^i \varepsilon_{\vec{k},r}^j D_{AB}^{i*} D_{AB}^j = \\
&= \frac{\omega_{AB}^3}{8\pi^2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{|\vec{k}|^2} \right) D_{AB}^{i*} D_{AB}^j = \\
&= \frac{\omega_{AB}^3}{8\pi^2} \left[|\vec{D}_{AB}|^2 - \frac{1}{|\vec{k}|^2} (\vec{k} \cdot \vec{D}_{AB}) (\vec{k} \cdot \vec{D}_{AB})^* \right] = \\
&= \frac{\omega_{AB}^3}{8\pi^2} |\vec{D}_{AB}|^2 [1 - |\mathbf{k} \cdot \mathbf{D}_{AB}|^2]
\end{aligned}$$

ove abbiamo indicato con le lettere in grassetto i versori dei corrispondenti vettori.

Finalmente ora integriamo su tutto l'angolo solido. Scrivendo il versore \mathbf{D}_{AB} come somma di un vettore reale \vec{D}_{AB}^R e di uno puramente immaginario $i\vec{D}_{AB}^I$:

$$\mathbf{D}_{AB} = \vec{D}_{AB}^R + i\vec{D}_{AB}^I \quad \text{con} \quad |\vec{D}_{AB}^R|^2 + |\vec{D}_{AB}^I|^2 = 1$$

e integrando su tutto l'angolo solido:

$$\begin{aligned}
W_{i \rightarrow f}^{emissione\ spontanea} &= \frac{\omega_{AB}^3}{8\pi^2} |\vec{D}_{AB}|^2 \left[\int_{\Omega_{\vec{k}}} d\Omega_{\vec{k}} + \right. \\
&\quad \left. - |\vec{D}_{AB}^R|^2 \int_{\Omega_{\vec{k}'}} \sin \theta' \cos^2 \theta' d\theta' d\varphi' - |\vec{D}_{AB}^I|^2 \int_{\Omega_{\vec{k}''}} \sin \theta'' \cos^2 \theta'' d\theta'' d\varphi'' \right]
\end{aligned}$$

Appaiono *primo* (') e *secondo* (") all'interno degli ultimi due integrali per il semplice motivo che l'angolo tra \vec{k} e gli altri vettori non coincide con la definizione di θ ! Quindi sia nel primo che nel secondo integrale si pensa di effettuare una trasformazione che porti rispettivamente \vec{D}_{AB}^R e \vec{D}_{AB}^I ad essere paralleli all'asse z . (Le due trasformazioni saranno in generale diverse, da qui i due indici). Questo ovviamente non ci crea problemi, difatti sia i moduli dei vettori che gli integrali sono indipendenti dal sistema di riferimento.

Il primo integrale è banalmente 4π mentre il secondo dà come risultato:

$$\int_{\Omega_{\vec{k}''}} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta d\varphi = \frac{4\pi}{3}$$

Sostituendo e ricordando che $|\vec{D}_{AB}^R|^2 + |\vec{D}_{AB}^I|^2 = 1$ si ottiene:

$$W_{i \rightarrow f}^{\text{emissione spontanea}} = \frac{\omega_{AB}^3}{3\pi} |\vec{D}_{AB}|^2 \quad (33)$$

cioè la probabilità nell'unità di tempo che il sistema di cariche transisca⁸ dallo stato A allo stato B di energia minore, emettendo un singolo fotone.⁹ Abbiamo inoltre visto che il fotone viene emesso con energia pari a ω_{AB} .

Ora riportiamo una definizione che dovrete già conoscere, cioè quella di *vita media* dello stato A , che ora è naturalmente definibile come:

$$\frac{1}{\tau} = \sum_f W_{i \rightarrow f}^{\text{emissione spontanea}} \quad (34)$$

Per concludere facciamo notare che quando detto finora vale, lo ricordiamo, in *approssimazione di dipolo elettrico*. Quindi si capisce che tutti i risultati fin qui ottenuti potevano essere ricavati partendo direttamente dall'hamiltoniana:

$$\hat{H} = -\vec{D} \cdot \vec{E}(\vec{x}, t)$$

che esprime l'energia di un dipolo elettrico, ove \vec{D} è l'operatore di dipolo elettrico, definito direttamente a partire dalla definizione classica. Su tale \hat{H} successivamente deve essere fatta *l'approssimazione di dipolo elettrico* in modo da rendere \vec{E} indipendente dalla posizione. Questa seconda strada (perché più breve) è quella seguita dal professore a lezione.

7 Limite classico per l'emissione spontanea

La (33) è stata ricavata con la meccanica quantistica non relativistica e rappresenta, come già detto, la probabilità in funzione del tempo che il sistema di cariche elettriche, visto come un dipolo elettrico, transisca dallo stato A allo stato B .

L'energia emessa per unità di tempo, cioè la potenza, è data chiaramente dalla probabilità per unità di tempo moltiplicata per l'energia rilasciata ad ogni transizione, cioè ω_{AB} :

$$P_{AB} = W_{i \rightarrow f}^{\text{emissione spontanea}} \omega_{AB} = \frac{\omega_{AB}^4}{3\pi} |\vec{D}_{AB}|^2$$

⁸Si sottintende che comunque vengano rispettate le regole di selezione, pena l'annullamento di \vec{D}_{AB} e quindi di W .

⁹Questo non è nient'altro che il risultato ottenuto a *Struttura della materia* e che avevate chiamato B . Le piccole differenze sono dovute ai diversi sistemi di unità di misura.

Se si considera un solo elettrone di carica $-e$ si ha:

$$P_{AB} = \frac{\omega_{AB}^4 e^2}{3\pi} |\vec{x}_{AB}|^2 \quad (35)$$

Quest'ultima espressione, sommata su tutti gli stati B deve coincidere nel limite classico con, appunto, la legge che descrive lo stesso fenomeno in fisica classica. Tale legge come ben sapete è la *formula di Lienard*:¹⁰

$$P = \frac{e^2}{6\pi} |\ddot{\vec{x}}|^2 \quad (36)$$

Vediamo se veramente la (35) si riduce alla (36).

$$\begin{aligned} P_{AB} = \frac{e^2}{3\pi} \omega_{AB}^4 |\vec{x}_{AB}|^2 &= \frac{e^2}{3\pi} \omega_{AB}^4 \langle A|\vec{\hat{x}}|B\rangle \langle B|\vec{\hat{x}}|A\rangle = \\ &= \frac{e^2}{3\pi} \langle A|\ddot{\hat{x}}|B\rangle \langle B|\ddot{\hat{x}}|A\rangle = \\ &= \frac{e^2}{3\pi} |\ddot{\vec{x}}_{AB}|^2 \end{aligned}$$

Ove si è usato il fatto che nella rappresentazione di interazione:

$$\dot{\hat{O}}(t) = i [\hat{O}(t), \hat{H}_0]$$

che applicato due volte ad $\vec{\hat{x}}$ ci porta a:

$$\ddot{\vec{\hat{x}}}(t) = -\vec{\hat{x}}(t)\hat{H}^2 + 2\hat{H}\vec{\hat{x}}(t)\hat{H} - \hat{H}^2\vec{\hat{x}}$$

e quindi a:

$$\langle A|\ddot{\vec{\hat{x}}}|B\rangle = -\omega_{AB} \langle A|\vec{\hat{x}}|B\rangle .$$

Dobbiamo, credo sommare su tutti i B, (e A?) alla fine dovrebbe venire:

$$P = \frac{e^2}{3\pi} \ddot{\vec{x}}$$

Viene il doppio di Lienard!! Perché?! Capiamo che la somma va fatta solo su $E_B < E_A$. Abbiamo contanto il doppio. Quindi bisogna dividere per 2. Diciamo il doppio perché “per numeri quantici grandi” la densità degli stati è costante. Così torna Lienard.

¹⁰Espressa nelle nostre unità.

8 note

- ma φ e A possono dipendere dal tempo o sbaglio?! Ma il formalismo non cambia in questo caso?! Io mi ricordavo che le lagrangiane le possiamo scrivere così solo se U dipende da x e \dot{x} !
- rifare completamente la sezione 7, non l'ho capita dalla sommatoria in poi.

Indice

1	Principio di minima sostituzione	1
2	Hamiltoniana di un sistema di cariche elettriche	2
3	Emissione e assorbimento di fotoni	3
4	L'approssimazione di dipolo elettrico	5
5	Emissione e assorbimento indipendenti da k	7
6	L'emissione spontanea	8
7	Limite classico per l'emissione spontanea	10
8	note	12